

# Missile Patriot

## Nombres flottants

Christophe Viroulaud

Première - NSI

**DonRep 04**

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Le 25 février 1991, à Dhahan en Arabie Saoudite, un missile Patriot (figure 1) américain a raté l'interception d'un missile Scud irakien. Ce dernier provoqua la mort de 28 personnes. La commission d'enquête a conclu à un défaut de l'horloge interne du missile. Cette dernière mesurait le temps en  $1/10s$ .



FIGURE 1 – Missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Pourquoi la représentation en mémoire du temps a  
engendré cette erreur ?

## 1. Représentation générale des nombres réels

### 1.1 Écriture scientifique

### 1.2 Représentation en mémoire

## 2. La norme *IEEE 754*

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

**Écriture scientifique**

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

L'écriture scientifique des nombres réels répond à certaines règles :

- ▶  $1468 = +1,468 \times 10^3$
- ▶  $-891 = -8,91 \times 10^2$
- ▶  $0,00023 = 2,3 \times 10^{-4}$

## À retenir

La forme générale d'un nombre réel s'écrit :

$$\pm 1 \times \textit{mantisse} \times 10^{\textit{exposant}}$$

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

## 1. Représentation générale des nombres réels

### 1.1 Écriture scientifique

### 1.2 Représentation en mémoire

## 2. La norme *IEEE 754*

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

**Représentation en mémoire**

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

La représentation des nombres réels en mémoire s'appuie sur l'écriture scientifique mais :

- ▶ elle utilise la *base 2*,
- ▶ l'exposant est *biaisé* (décalé) d'une valeur  $d$  dépendante du format (32 ou 64 bits),
- ▶ la mantisse est comprise entre  $[1 ; 2[$ .



Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

**Représentation en mémoire**

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

## À retenir

La forme générale d'un nombre réel en mémoire s'écrit :

$$(-1)^s \times m \times 2^{n-d}$$

## 1. Représentation générale des nombres réels

## 2. La norme *IEEE 754*

### 2.1 Les choix effectués

### 2.2 Les formats

### 2.3 Un exemple

### 2.4 Pour aller plus loin

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

# Les choix effectués

C'est une norme mise au point par le *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. Des choix techniques ont été pris :

- ▶ Cette représentation n'utilise pas le *complément à 2* pour stocker les exposants négatifs, mais un décalage d'une valeur  $d$ .
- ▶ La mantisse est un nombre de la forme  $1,xxxxxx$ . Afin de gagner 1 bit en précision, on ne représente que les chiffres après la virgule.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

## 1. Représentation générale des nombres réels

## 2. La norme *IEEE 754*

### 2.1 Les choix effectués

### 2.2 Les formats

### 2.3 Un exemple

### 2.4 Pour aller plus loin

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

**Les formats**

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

**Les formats**

Un exemple

Pour aller plus loin

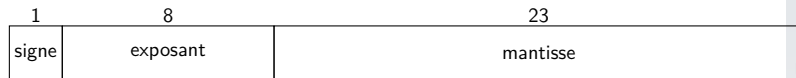
Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

**Simple précision** : Le nombre est représenté sur 32 bits.



L'exposant est représenté sur 8 bits donc des entiers entre 0 et 255. Il est décalé de  $d=127$  donc il est possible de représenter des exposants *signés* dans l'intervalle  $[-127;128]$ .

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

**Les formats**

Un exemple

Pour aller plus loin

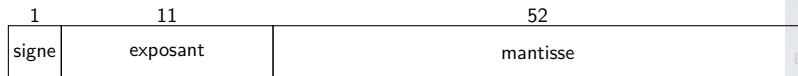
Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

**Double précision** : Le nombre est représenté sur 64 bits.



Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

**Les formats**

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

## Activité 1 :

1. En s'appuyant sur le format 32 bits, donner la valeur du décalage  $d$  pour le format 64 bits.
2. En déduire les valeurs possibles pour l'exposant.

- ▶  $2^{11} = 2048$  donc entre 0 et 2047 nombres
- ▶  $d = 2^{11-1} - 1 = 1023$  donc les exposants signés sont dans l'intervalle  $[-1023; 1024]$

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

**Les formats**

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot



## 1. Représentation générale des nombres réels

## 2. La norme *IEEE 754*

### 2.1 Les choix effectués

### 2.2 Les formats

### 2.3 Un exemple

### 2.4 Pour aller plus loin

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

**Un exemple**

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

# Un exemple

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

**Un exemple**

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Considérons le mot de 32 bits :

*signe*      *exposant*      *mantisse*

1    10000110    101011011000000000000000000000

► **signe** :  $(-1)^1 = -1$

► **exposant** :  $(2^7 + 2^2 + 2^1) - 127 = 134 - 127 = 7$

► **mantisse** :

$$1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-9} = 1,677734375$$

Le nombre représenté est :

$$-1 \times 1,677734375 \times 2^7 = -214,75$$

**Activité 2 :** Retrouver le nombre décimal représenté  
par les mots de 32 bits suivants :



*signe*      *exposant*                      *mantisse*  
┌───┬──────────┬──┐  
1    10000111    11000000000000000000000000000000



0 10000010 10100100000000000000000000000000

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

Les formats

**Un exemple**

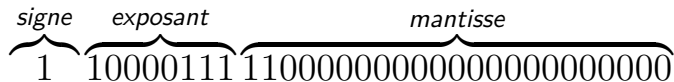
Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot



- ▶ signe :  $(-1)^1 = -1$
- ▶ exposant :  $(2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0) - 127 = 135 - 127 = 8$
- ▶ mantisse :  $1 + 2^{-1} + 2^{-2} = 1,75$

Le nombre représenté est :

$$-1 \times 1,75 \times 2^8 = -448$$

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

**Un exemple**

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

0 10000010 101001000000000000000000

- ▶ **signe** :  $(-1)^0 = 1$
- ▶ **exposant** :  $(2^7 + 2^1) - 127 = 130 - 127 = 3$
- ▶ **mantisse** :  $1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-6} = 1,640625$

Le nombre représenté est :

$$1 \times 1,640625 \times 2^3 = 13,125$$

## 1. Représentation générale des nombres réels

## 2. La norme *IEEE 754*

### 2.1 Les choix effectués

### 2.2 Les formats

### 2.3 Un exemple

### 2.4 Pour aller plus loin

## 3. Limites de la représentation

## 4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

**Pour aller plus loin**

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

La norme *IEEE 754* contient davantage de subtilités (représentation de 0, infini, dépassement de capacité, écart minimal...). Cette notion n'est pas au programme mais il peut être intéressant de lire la page Wikipédia correspondante :

[https://fr.wikipedia.org/wiki/IEEE\\_754](https://fr.wikipedia.org/wiki/IEEE_754)

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot



1. Représentation générale des nombres réels
2. La norme *IEEE 754*
3. Limites de la représentation
  - 3.1 Convertir un nombre réel
  - 3.2 Erreur de calcul ?
4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

# Convertir un nombre réel

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Pour donner la représentation de 0,6875, il faut d'abord convertir 0,6875 en base 2

▶  $0,6875 \times 2 = 1,375$

▶  $0,375 \times 2 = 0,75$

▶  $0,75 \times 2 = 1,5$

▶  $0,5 \times 2 = 1,0$

$$0,6875_{10} = 0,1011_2$$

# Représentation en simple précision

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

$$0,1011_2 = 1,011 \times 2^{-1}$$

- ▶ signe : 0
- ▶ mantisse : 011000...
- ▶ exposant :  $-1 + 127 = 126_{10} = 01111110_2$

*signe*     *exposant*     *mantisse*  
0     01111110     011000000000000000000000

## 1. Représentation générale des nombres réels

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

## 2. La norme *IEEE 754*

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

## 3. Limites de la représentation

Limites de la  
représentation

### 3.1 Convertir un nombre réel

Convertir un nombre réel

### 3.2 Erreur de calcul ?

Erreur de calcul ?

## 4. Imprécision du missile Patriot

Imprécision du  
missile Patriot

# Erreur de calcul ?

```
1 >>> 0.2 + 0.1  
2 0.30000000000000004
```

Code 1 – Ce code renvoie un résultat surprenant.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

### Activité 3 :

1. Convertir 0,2 en base 2.
2. Que peut-on en déduire sur la représentation de ce nombre en mémoire ?

Convertir 0,2 en représentation binaire :

- ▶  $0,2 \times 2 = 0,4$
- ▶  $0,4 \times 2 = 0,8$
- ▶  $0,8 \times 2 = 1,6$
- ▶  $0,6 \times 2 = 1,2$
- ▶  $0,2 \times 2 = 0,4$
- ▶ ...

## À retenir

La représentation en mémoire de certains réels n'est pas exacte. Elle est tronquée en fonction de la taille du mot mémoire.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

1. Représentation générale des nombres réels
2. La norme *IEEE 754*
3. Limites de la représentation
4. Imprécision du missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot



L'horloge interne du missile Patriot mesure le temps en  $1/10$ s soit 0,1s. Pour obtenir le temps en seconde, le système multipliait ce nombre par 10 en utilisant un registre de 24 bits en virgule fixe.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

## Activité 4 :

1. Convertir 0,1 en base 2. Que constate-t-on ?

Le registre de 24 bits contenait  $(0,00011001100110011001100)_2$  et induisait une erreur binaire de  $(0,0000000000000000000000011001100\dots)_2$ , soit approximativement 0,000000095s en notation décimale.

2. Le missile était allumé depuis 100 heures. Calculer le décalage *noté*  $\varepsilon$  entre l'horloge interne et le temps réel.
3. Un missile Scud volait à la vitesse de  $1676m.s^{-1}$ . Calculer la distance parcourue par le missile pendant la durée  $\varepsilon$ .

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Convertir 0,1 en représentation binaire :

▶  $0,1 \times 2 = 0,2$

▶  $0,2 \times 2 = 0,4$

▶  $0,4 \times 2 = 0,8$

▶  $0,8 \times 2 = 1,6$

▶  $0,6 \times 2 = 1,2$

▶  $0,2 \times 2 = 0,4$

▶ ...

La représentation en mémoire de 0,1 sera tronquée.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
*754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot

▶  $0,000000095 \times 100 \times 3600 \times 10 = 0,34s$

▶  $1676 \times 0,34 = 569m$

## À retenir

La représentation en mémoire des nombres réels peut être approximative. On veillera à éviter les comparaisons entre deux nombres réels dans un programme.

Représentation  
générale des  
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*  
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la  
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du  
missile Patriot