

Missile Patriot

Nombres flottants

Christophe Viroulaud

Première - NSI

DonRep 04

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Le 25 février 1991, à Dharan en Arabie Saoudite, un missile Patriot (figure 1) américain a raté l'interception d'un missile Scud irakien. Ce dernier provoqua la mort de 28 personnes. La commission d'enquête a conclu à un défaut de l'horloge interne du missile. Cette dernière mesurait le temps en $1/10s$.



FIGURE 1 – Missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Pourquoi la représentation en mémoire du temps a
engendré cette erreur ?

1. Représentation générale des nombres réels

1.1 Écriture scientifique

1.2 Représentation en mémoire

2. La norme *IEEE 754*

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

L'écriture scientifique des nombres réels répond à certaines règles :

- ▶ $1468 = +1,468 \times 10^3$
- ▶ $-891 = -8,91 \times 10^2$
- ▶ $0,00023 = 2,3 \times 10^{-4}$

Représentation générale des nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE 754*

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du missile Patriot

À retenir

La forme générale d'un nombre réel s'écrit :

$$\pm 1 \times \textit{mantisse} \times 10^{\textit{exposant}}$$

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

1. Représentation générale des nombres réels

1.1 Écriture scientifique

1.2 Représentation en mémoire

2. La norme *IEEE 754*

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

La représentation des nombres réels en mémoire s'appuie sur l'écriture scientifique mais :

- ▶ elle utilise la *base 2*,
- ▶ l'exposant est *biaisé* (décalé) d'une valeur d dépendante du format (32 ou 64 bits),
- ▶ la mantisse est comprise entre $[1 ; 2[$.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

À retenir

La forme générale d'un nombre réel en mémoire s'écrit :

$$(-1)^s \times m \times 2^{n-d}$$

1. Représentation générale des nombres réels

2. La norme *IEEE 754*

2.1 Les choix effectués

2.2 Les formats

2.3 Un exemple

2.4 Pour aller plus loin

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Les choix effectués

C'est une norme mise au point par le *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. Des choix techniques ont été pris :

- ▶ Cette représentation n'utilise pas le *complément à 2* pour stocker les exposants négatifs, mais un décalage d'une valeur d .
- ▶ La mantisse est un nombre de la forme $1,xxxxxx$. Afin de gagner 1 bit en précision, on ne représente que les chiffres après la virgule.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

1. Représentation générale des nombres réels

2. La norme *IEEE 754*

2.1 Les choix effectués

2.2 Les formats

2.3 Un exemple

2.4 Pour aller plus loin

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Simple précision : Le nombre est représenté sur 32 bits.



L'exposant est représenté sur 8 bits donc des entiers entre 0 et 255. Il est décalé de $d=127$ donc il est possible de représenter des exposants *signés* dans l'intervalle $[-127;128]$.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

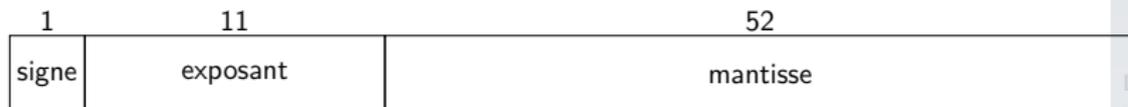
Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Double précision : Le nombre est représenté sur 64 bits.



Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Activité 1 :

1. En s'appuyant sur le format 32 bits, donner la valeur du décalage d pour le format 64 bits.
2. En déduire les valeurs possibles pour l'exposant.

- ▶ $2^{11} = 2048$ donc entre 0 et 2047 nombres
- ▶ $d = 2^{11-1} - 1 = 1023$ donc les exposants signés sont dans l'intervalle $[-1023; 1024]$

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

1. Représentation générale des nombres réels

2. La norme *IEEE 754*

2.1 Les choix effectués

2.2 Les formats

2.3 Un exemple

2.4 Pour aller plus loin

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Un exemple

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Considérons le mot de 32 bits :

signe *exposant* *mantisse*

1 10000110 101011011000000000000000000000

► **signe** : $(-1)^1 = -1$

► **exposant** : $(2^7 + 2^2 + 2^1) - 127 = 134 - 127 = 7$

► **mantisse** :

$$1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-9} = 1,677734375$$

Le nombre représenté est :

$$-1 \times 1,677734375 \times 2^7 = -214,75$$

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

0 10000010 101001000000000000000000

- ▶ **signe** : $(-1)^0 = 1$
- ▶ **exposant** : $(2^7 + 2^1) - 127 = 130 - 127 = 3$
- ▶ **mantisse** : $1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-6} = 1,640625$

Le nombre représenté est :

$$1 \times 1,640625 \times 2^3 = 13,125$$

1. Représentation générale des nombres réels

2. La norme *IEEE 754*

2.1 Les choix effectués

2.2 Les formats

2.3 Un exemple

2.4 Pour aller plus loin

3. Limites de la représentation

4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

La norme *IEEE 754* contient davantage de subtilités (représentation de 0, infini, dépassement de capacité, écart minimal...). Cette notion n'est pas au programme mais il peut être intéressant de lire la page Wikipédia correspondante :

https://fr.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

1. Représentation générale des nombres réels
2. La norme *IEEE 754*
3. Limites de la représentation
 - 3.1 Convertir un nombre réel
 - 3.2 Erreur de calcul ?
4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Convertir un nombre réel

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Pour donner la représentation de 0,6875, il faut d'abord convertir 0,6875 en base 2

▶ $0,6875 \times 2 = 1,375$

▶ $0,375 \times 2 = 0,75$

▶ $0,75 \times 2 = 1,5$

▶ $0,5 \times 2 = 1,0$

$$0,6875_{10} = 0,1011_2$$

Représentation en simple précision

Représentation générale des nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE 754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la représentation

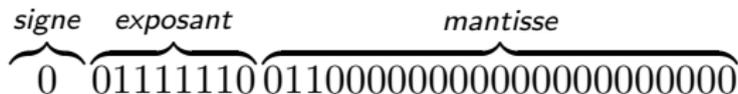
Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du missile Patriot

$$0,1011_2 = 1,011 \times 2^{-1}$$

- ▶ signe : 0
- ▶ mantisse : 011000...
- ▶ exposant : $-1 + 127 = 126_{10} = 01111110_2$



1. Représentation générale des nombres réels

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

2. La norme *IEEE 754*

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

3. Limites de la représentation

Limites de la
représentation

3.1 Convertir un nombre réel

Convertir un nombre réel

3.2 Erreur de calcul ?

Erreur de calcul ?

4. Imprécision du missile Patriot

Imprécision du
missile Patriot

Erreur de calcul ?

```
1 >>> 0.2 + 0.1  
2 0.30000000000000004
```

Code 1 – Ce code renvoie un résultat surprenant.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Activité 3 :

1. Convertir 0,2 en base 2.
2. Que peut-on en déduire sur la représentation de ce nombre en mémoire ?

Correction

Convertir 0,2 en représentation binaire :

- ▶ $0,2 \times 2 = 0,4$
- ▶ $0,4 \times 2 = 0,8$
- ▶ $0,8 \times 2 = 1,6$
- ▶ $0,6 \times 2 = 1,2$
- ▶ $0,2 \times 2 = 0,4$
- ▶ ...

À retenir

La représentation en mémoire de certains réels n'est pas exacte. Elle est tronquée en fonction de la taille du mot mémoire.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

1. Représentation générale des nombres réels
2. La norme *IEEE 754*
3. Limites de la représentation
4. Imprécision du missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Imprécision du missile Patriot

L'horloge interne du missile Patriot mesure le temps en $1/10$ s soit 0,1s. Pour obtenir le temps en seconde, le système multipliait ce nombre par 10 en utilisant un registre de 24 bits en virgule fixe.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Activité 4 :

1. Convertir 0,1 en base 2. Que constate-t-on ?

Le registre de 24 bits contenait $(0,00011001100110011001100)_2$ et induisait une erreur binaire de $(0,0000000000000000000000011001100\dots)_2$, soit approximativement 0,000000095s en notation décimale.

2. Le missile était allumé depuis 100 heures. Calculer le décalage *noté* ε entre l'horloge interne et le temps réel.
3. Un missile Scud volait à la vitesse de $1676m.s^{-1}$. Calculer la distance parcourue par le missile pendant la durée ε .

Représentation générale des nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme IEEE 754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du missile Patriot

Convertir 0,1 en représentation binaire :

▶ $0,1 \times 2 = 0,2$

▶ $0,2 \times 2 = 0,4$

▶ $0,4 \times 2 = 0,8$

▶ $0,8 \times 2 = 1,6$

▶ $0,6 \times 2 = 1,2$

▶ $0,2 \times 2 = 0,4$

▶ ...

La représentation en mémoire de 0,1 sera tronquée.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot

▶ $0,000000095 \times 100 \times 3600 \times 10 = 0,34s$

▶ $1676 \times 0,34 = 569m$

À retenir

La représentation en mémoire des nombres réels peut être approximative. On veillera à éviter les comparaisons entre deux nombres réels dans un programme.

Représentation
générale des
nombres réels

Écriture scientifique

Représentation en mémoire

La norme *IEEE*
754

Les choix effectués

Les formats

Un exemple

Pour aller plus loin

Limites de la
représentation

Convertir un nombre réel

Erreur de calcul ?

Imprécision du
missile Patriot