

Détection de cycle dans un graphe orienté

Christophe Viroulaud

Terminale - NSI

Algo 19

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

- ▶ La réalisation d'un projet est découpée en plusieurs tâches.

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

- ▶ La réalisation d'un projet est découpée en plusieurs tâches.
- ▶ Certaines tâches doivent être réalisées avant d'autres.

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Projet : Construire une maison

1. Construire les fondations.
2. Construire les murs.
3. Poser la toiture.
4. Monter les cloisons.
5. ...

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

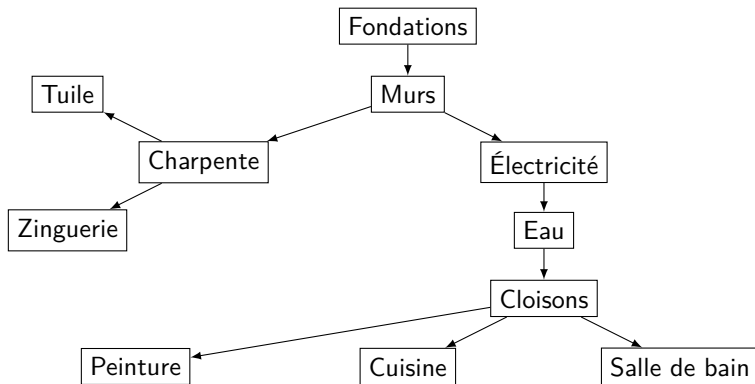


FIGURE 1 – On représente l'ordonnancement des tâches par un graphe de précédences.

On représente l'ordonnancement des tâches par un graphe de précédences.

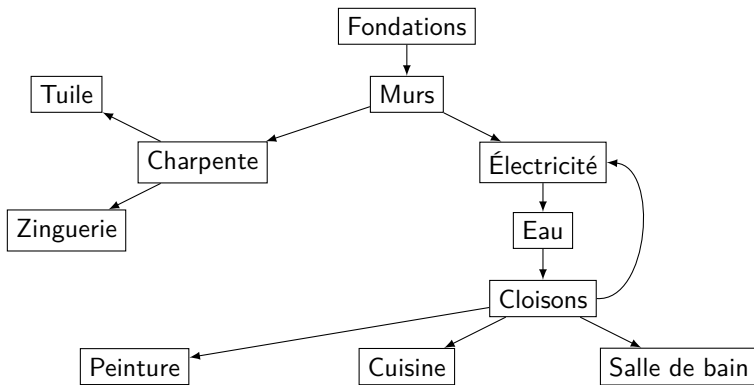


FIGURE 2 – Problème dans l'ordonnancement

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en profondeur

Algorithme

Implémentation

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Comment repérer un cycle dans un graphe orienté ?

Sommaire

1. Définition

1.1 Cycle dans un graphe

1.2 Vocabulaire

1.3 Cas de figures

2. Détection de cycle

3. Algorithme

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Définition - cycle dans un graphe

À retenir

Dans un graphe, un **cycle** est un **chemin** qui part d'un sommet et revient à ce même sommet.

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Sommaire

1. Définition

1.1 Cycle dans un graphe

1.2 Vocabulaire

1.3 Cas de figures

2. Détection de cycle

3. Algorithme

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

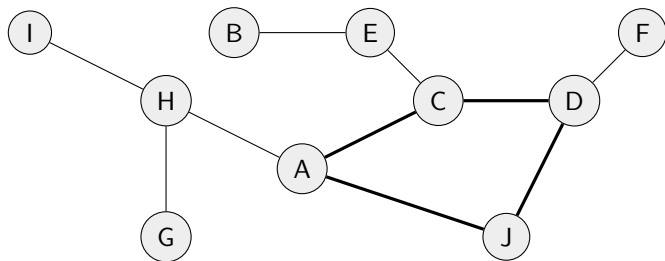
Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation



Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

FIGURE 3 – **Chaîne** et **cycle** dans un graphe non orienté

- ▶ une **chaîne** : I - H - A
- ▶ un **cycle** : A - J - D - C

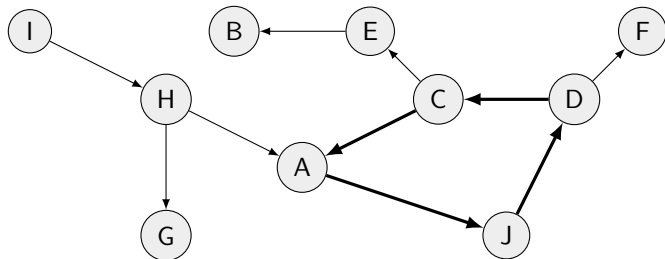


FIGURE 4 – **Chemin** et **circuit** dans un graphe orienté

- ▶ un **chemin** : I - H - A
- ▶ un **circuit** : A - J - D - C

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en profondeur

Algorithme

Implémentation

Remarque

Dans de nombreux ouvrages, les termes **cycle** et **circuit** ainsi que **chaîne** et **chemin**, sont indifférenciés.

Sommaire

1. Définition

1.1 Cycle dans un graphe

1.2 Vocabulaire

1.3 Cas de figures

2. Détection de cycle

3. Algorithme

Cas de figures

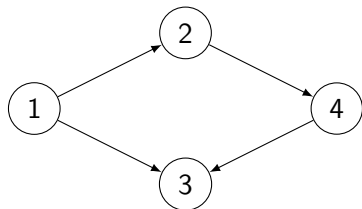


FIGURE 5 – Pas de circuit

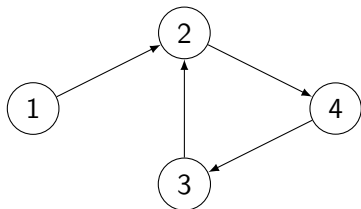


FIGURE 6 – Circuit

Observation

Dans ces graphes, un parcours en profondeur partant de A affiche 1 - 2 - 4 - 3, mais ne détecte pas le cycle.

Sommaire

1. Définition

2. Détection de cycle

2.1 Modification du parcours en profondeur

3. Algorithme

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

On distingue trois états pour les sommets :

- ▶ **BLANC** : sommet non encore atteint,
- ▶ **GRIS** : sommet en cours de visite,
- ▶ **NOIR** : sommet dont le parcours est terminé.

À retenir

- ▶ On note en **GRIS** les sommets pour lesquels on n'a pas encore visités tous les voisins.
- ▶ On note en **NOIR** les sommets pour lesquels tous les voisins ont été visités.

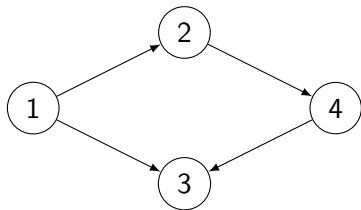


FIGURE 7 – Initialisation : tous les sommets en **BLANC**

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

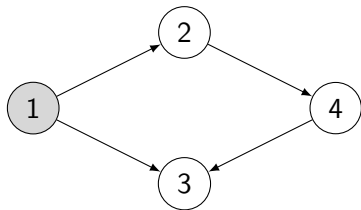


FIGURE 8 – Début du parcours

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

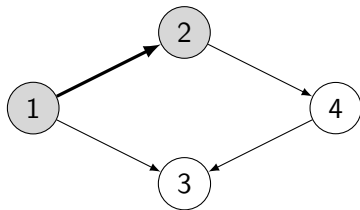


FIGURE 9 – Parcours récursif

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

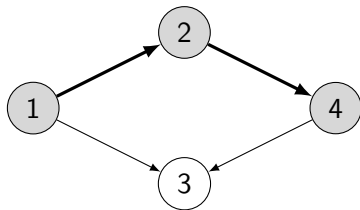


FIGURE 10 – Parcours récursif

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

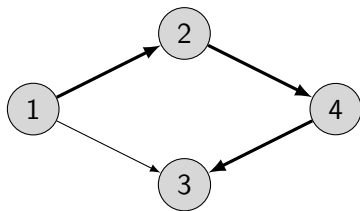


FIGURE 11 – Parcours récursif

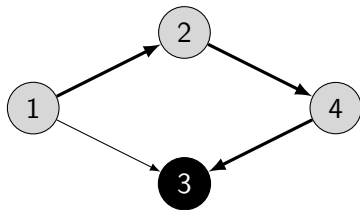


FIGURE 12 – Fin du parcours pour 3

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

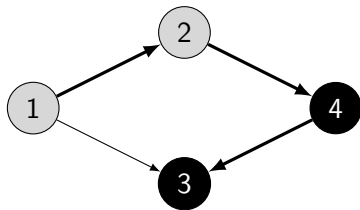


FIGURE 13 – Fin du parcours pour 4

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

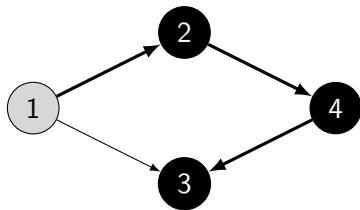


FIGURE 14 – Fin du parcours pour 2

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

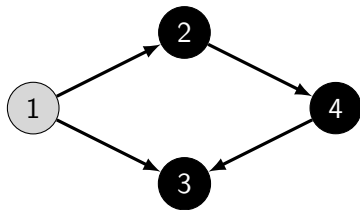


FIGURE 15 – 3 est NOIR : pas de cycle.

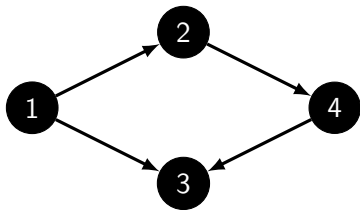


FIGURE 16 – Fin du parcours pour 1

Pas de cycle

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

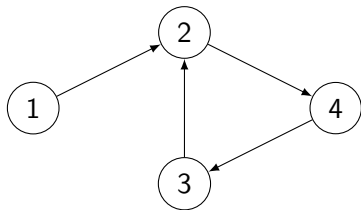


FIGURE 17 – Initialisation

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

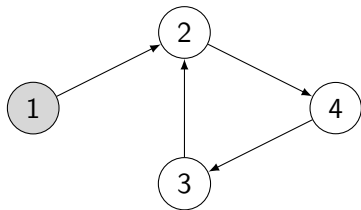


FIGURE 18 – Début du parcours

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

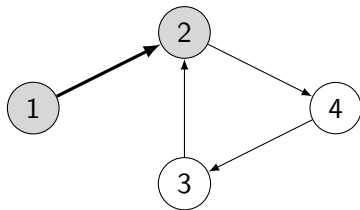


FIGURE 19 – Parcours récursif

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

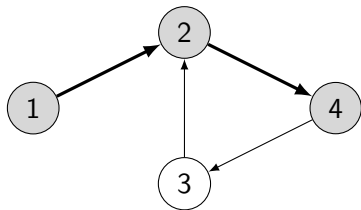


FIGURE 20 – Parcours récursif

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

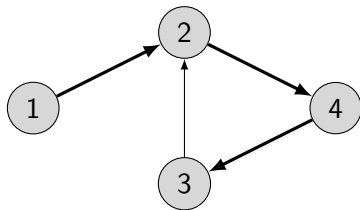


FIGURE 21 – Parcours récursif

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

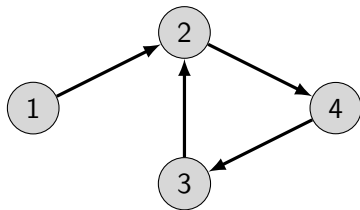


FIGURE 22 – Le sommet 2 est GRIS : il y a un cycle.

À retenir

Lors du parcours en profondeur, si on rencontre un sommet identifié comme *en cours de parcours* alors il y a un cycle.

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Sommaire

1. Définition

2. Détection de cycle

3. Algorithme

3.1 Implémentation

Détection de cycle dans un graphe orienté

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithmme

Implémentation

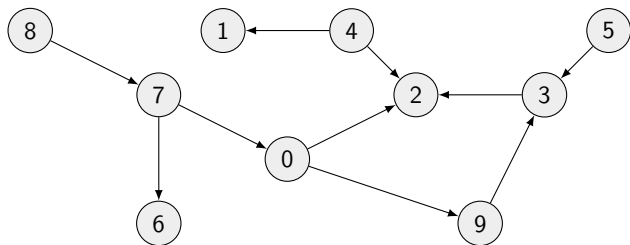
- ▶ Initialiser chaque sommet à **BLANC**.
- ▶ Pour chaque sommet :
 - ▶ Effectuer un parcours en profondeur.
 - ▶ Si le parcours est un cycle, renvoyer **Vrai**.
- ▶ Renvoyer **Faux**

Code 1 – Vérifier s'il y a un cycle.

- ▶ Initialiser chaque sommet à **BLANC**.
- ▶ Pour chaque sommet :
 - ▶ Effectuer un parcours en profondeur.
 - ▶ Si le parcours est un cycle, renvoyer **Vrai**.
- ▶ Renvoyer **Faux**

- ▶ Si le sommet est **GRIS** renvoyer **Vrai**.
- ▶ Si le sommet est **NOIR** renvoyer **Faux**.
- ▶ Marquer le sommet **GRIS**.
- ▶ pour tous les sommets voisins :
 - ▶ Effectuer récursivement un parcours en profondeur.
 - ▶ Si le parcours est un cycle, renvoyer **Vrai**.
- ▶ Marquer le sommet **NOIR**.
- ▶ Renvoyer **Faux**.

Implémentation



Activité 1 :

1. Reprendre le graphe du TP précédent.
2. Écrire la fonction `a_cycle(mat: list) → bool` qui lance un parcours depuis chaque sommet.
3. Écrire la fonction récursive `dfs(mat: list, dep: int, vis: list) → bool` qui effectue le parcours en profondeur.

```
1 BLANC, GRIS, NOIR = 0, 1, 2
2
3 def a_cycle(mat: list) -> bool:
4     visites = [BLANC for _ in range(len(mat))]
5     for i in range(len(mat)):
6         # lance un parcours depuis chaque sommet
7         if dfs(mat, i, visites):
8             return True
9     return False
```



```
1 def dfs(mat: list, dep: int, vis: list) -> bool:
2     if vis[dep] == GRIS: # cycle
3         return True
4     if vis[dep] == NOIR:
5         return False
6
7     # marque le sommet en cours de visite
8     vis[dep] = GRIS
9     for i in range(len(mat[dep])):
10        # c'est un successeur
11        if mat[dep][i] == 1:
12            if dfs(mat, i, vis):
13                # remontée des appels récursifs
14                return True
15
16    # fin de la visite
17    vis[dep] = NOIR
18    return False
```

Définition

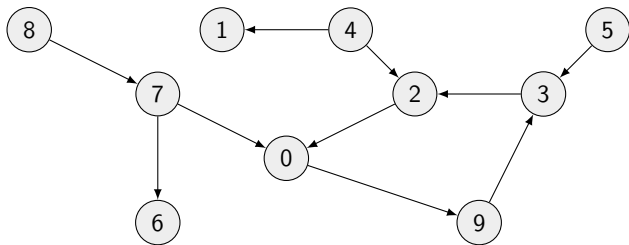
Cycle dans un graphe
Vocabulaire
Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation



Activité 2 : Modifier la matrice pour créer un cycle et tester la fonction à nouveau.

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

Définition

Cycle dans un graphe

Vocabulaire

Cas de figures

Détection de cycle

Modification du parcours en
profondeur

Algorithme

Implémentation

```
1 cycle_oui = [  
2     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],  
3     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
4     [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
5     [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
6     [0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
7     [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
8     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],  
9     [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],  
10    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],  
11    [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]  
12  
13 print(a_cycle(cycle_oui))
```